Kurvendiskussion einer e-Funktion

Henning Tillmann

7. April 2005

1 Kurvendiskussion

In diesem Abschnitt betrachten wir folgende Funktion:

$$f(x) = (x-2) \cdot e^x \tag{1}$$

1.1 Definitionsbereich

$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$$

1.2 Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + (x-2) \cdot e^x \\ f''(x) &= 2 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x \\ f'''(x) &= 3 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x \end{aligned}$$

Anmerkung: Mir ist erst im Nachhinein aufgefallen, dass die Ableitungen noch vereinfacht werden können, indem ein e^x ausgeklammert wird.

1.3 Grenzwertverhalten

In diesem Fall untersuchen wir das Verhalten der Funktion f in Richtung positiv und negativ Unendlich:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -0$$

1.4 Symmetrie

Aufgrund des Grenzwertverhaltens ist *keine Achsensymmetrie* bzgl. der y-Achse und *keine Punktsymmetrie zum Ursprung* erkennbar.

$$f(x) \neq f(-x) \quad \wedge \quad f(x) \neq -f(-x)$$

1.5 Schnittpunkt mit den Achsen

1.5.1 Nullstellen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
x-2 &= 0 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse lautet $\mathcal{N}(2|0)$. Es muss lediglich geprüft werden, wann der Ausdruck in der Klammer null wird, da e^x stets größer 0 ist.

1.5.2 Schnitt mit der y-Achse

$$f(0) = (0-2) \cdot 1 = -2$$

Die Funktion schneidet die y-Achse bei $\mathcal{Y}(0|-2)$.

1.6 Extremstellen

Überprüfen der *notwendigen Bedingung* für Extremstellen:

$$f'(x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
e^x + x \cdot e^x - 2 \cdot e^x &= 0 \\
-e^x + x \cdot e^x &= 0 \\
x \cdot e^x &= e^x \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Überprüfen der *hinreichenden Bedingung* für die mögliche Extremstelle $x = 1$:

$$f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) \neq 0$$

$$
\begin{aligned}
f''(1) &= 2 \cdot e + (-e) = e \\
& e > 0
\end{aligned}
$$

Es handelt sich bei der gefundenen Extremstelle um ein *lokales Minimum.* Um die y-Koordinate des Tiefpunkts zu bestimmen, wird die Extremstelle in f eingesetzt.

$$f(1) = (1-2) \cdot e^1 = -e$$

Das Minumum lautet daher: $\mathcal{E}(1|-e)$.

1.7 Wendestellen

Überprüfen der *notwendigen Bedingung* für Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x &= 0 \\
2 \cdot e^x + x \cdot e^x - 2 \cdot e^x &= 0 \\
x \cdot e^x &= 0 \\
&\Rightarrow \quad x = 0
\end{aligned}$$

Überprüfen der *hinreichenden Bedingung* für die mögliche Wendestelle $x = 0$:

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
f'''(0) &= 3 \cdot e^0 + (0-2) \cdot e^0 \\
&= 3 - 2 = 1 \\
& \quad 1 > 0
\end{aligned}$$

Um die y-Koordinate des Wendepunkts zu bestimmen, wird die Wendestelle in f eingesezt:

$$f(0) = (0-2) \cdot e^0 = -2$$

Der Wendepunkt lautet daher: $\mathcal{W}(0|-2)$.

2 Weitere Untersuchungen einer anderen Funktion

In diesem Abschnitt werden einige, jedoch nicht alle Untersuchungen einer Kurvendiskussion für folgende Funktion vorgestellt:

$$f(x) = x - k \cdot e^x \tag{2}$$

2.1 Grenzwertverhalten

Betrachtet man das Verhalten für $x \to +\infty$, so ist der Grenzwert der Funktion abhängig von dem Parameter k.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } k > 0 \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Funktionsverhalten bei $x \to -\infty$ ist offensichtlicher, da der zweite Summand gegen 0 strebt.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2.2 Extremstellen

Führen wir nun eine Untersuchung der Funktion (2) auf Extremstellen durch und bilden trivialerweise zunächst die ersten beiden Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - k \cdot e^x \\ f''(x) &= -k \cdot e^x \end{aligned}$$

Überprüfen der *notwendigen Bedingung* für Extremstellen:

$$f'(x) = 0$$

$$\begin{aligned} 1 - k \cdot e^x &= 0 \\ k \cdot e^x &= 1 \\ \ln(k \cdot e^x) &= \ln(1) \\ \ln(k) + \ln(e^x) &= 0 \\ \ln(k) + x &= 0 \\ x &= -\ln(k) \end{aligned}$$

Überprüfen der *hinreichenden Bedingung* für die mögliche
Extremstelle $x = -\ln(k)$:

$$f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f''(\ln(k)) &= -k \cdot e^{-\ln(k)} \\ &= -k \cdot \frac{1}{e^{\ln(k)}} \\ &= \frac{-k}{k} \qquad \text{f.a. } k \neq 0 \\ &= -1 \\ & -1 < 0 \end{aligned}$$

Falls $k \neq 0$, so handelt es sich bei der vermuteten Extremstelle um ein *lokales Maximum.* Die Bestimmung der y-Koordinate ist trivial und sollte intuitiv geschehen.

Falls $k = 0$ lässt sich keine Aussage machen, ob es sich um eine Extremstelle handelt oder nicht.